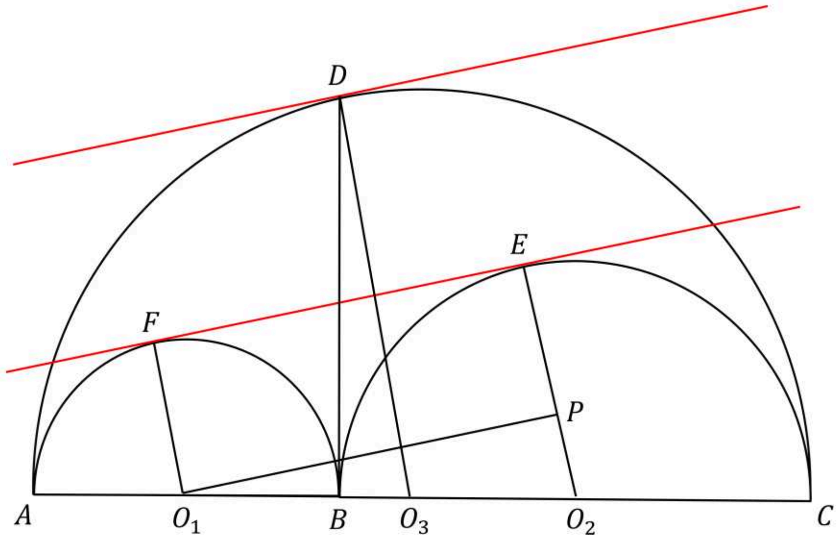
**АлексЛарин-308у, задача 24**

На стороне $AC$ взята точка $B$. На отрезках $AB$, $BC$, $CA$ соответственно построены полуокружности $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ по одну сторону от $AC$. $D$ – такая точка на $\omega_3$, что $BD$ перпендикулярна $AC$. Общая касательная к $\omega_1$ и $\omega_2$ касается этих полуокружностей в точках $F$ и $E$ соответственно. Докажите, что прямая $EF$ параллельна касательной к $\omega_3$, проведённой через точку $D$.

**Решение**

Пусть $O_1, O_2, O_3$ – центры окружностей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Чтобы доказать параллельность прямой $EF$ и касательной к $\omega_3$, проведённой через точку $D$ достаточно доказать параллельность радиусов $O_2E$ и $O_3D$, которые перпендикулярны данным прямым.




Проведём $O_1P \perp O_2E$ и пусть $O_1F = r_1$, $O_2E = r_2$, тогда $O_1O_2 = r_1 + r_2 = O_3D$ и $O_2P = r_2 - r_1 = O_3B$. Следовательно,

$$\triangle\, O_1PO_2 = \triangle\, BDO_3 \quad \Longrightarrow \quad \angle O_1O_2P = \angle BO_3D \quad \Longrightarrow \quad O_2E \parallel O_3D.$$