№14,
вар. 377

14. Решите неравенство: $\sqrt{\log^2_{0,5} x + 4\log_2 \sqrt{x}} < \sqrt{2}\cdot(4-\log_{16} x^4)$

Решение: Преобразуем входящие в нер-во логарифмы к основанию 2, учитывая, что $x>0$ (обл. опр. $\log x$).

$\log_{0,5} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x \Rightarrow \log^2_{0,5} x = (-\log_2 x)^2 = \log^2_2 x$;

$\log_2\sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_2 x$; $\log_{16} x^4 = \log_{2^4} x^4 = \frac{4}{4}\log_2|x| = \log_2 x$.

Данное нер-во теперь имеет вид:

$$\sqrt{\log^2_2 x + 2\log_2 x} < \sqrt{2}\cdot(4-\log_2 x).$$

Пусть $\log_2 x = t$, получим $\sqrt{t^2+2t} < \sqrt{2}\cdot(4-t)$.

$$\begin{cases} t^2+2t \geq 0 \\ 4-t>0 \\ t^2+2t<2(4-t)^2 \end{cases};\quad \begin{cases} t(t+2)\geq 0 \\ t<4 \\ t^2+2t<2(16-8t+t^2) \Leftrightarrow t^2-18t+32>0 \end{cases};$$

$$t_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81-32} = 9\pm 7 = \left[\begin{matrix} 2 \\ 16 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{matrix} t\leq -2 \\ t\geq 0 \end{matrix}\right. \\ t<4 \\ \left[\begin{matrix} t<2 \\ t>16 \end{matrix}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} \log_2 x \leq -2 \\ \log_2 x \geq 0 \end{matrix}\right. \\ \log_2 x < 4 \\ \left[\begin{matrix} \log_2 x<2 \\ \log_2 x>16 \end{matrix}\right. \end{cases};\quad \begin{cases} \left[\begin{matrix} 0<x\leq \frac{1}{4} \\ x\geq 1 \end{matrix}\right. \\ x<16 \\ x<4 \\ x>2^{16} \end{cases}$$

Ответ:

$x\in\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[1;4)$.

16. Дана равнобедренная трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает основание AD в точке L, точка M – середина CD.

а) Докажите, что четырехугольник DLOM - параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 60^\circ$, $BC = 3$.

№16, вар. 377.

Ответ: $3(4\sqrt{3}+7)$.

Решение.

а) Док-ть, что DLOM – парал-м.

Т.к. трапеция ABCD равнобедр., то $\angle A = \angle D = \alpha$ (обозн.)

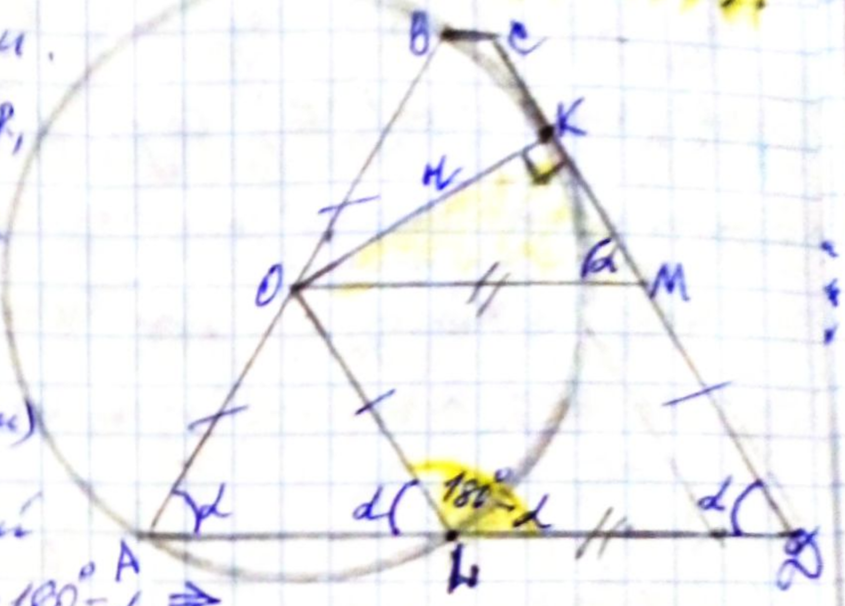
$OL = OA = r \Rightarrow \triangle AOL$ – равноб.

$OL = OA = MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = r$ (OM – ср. линия тр-ции)

Кроме того, в $\triangle AOL$ $\angle A = \angle L = \alpha \Rightarrow$ смежный угол OLD (углу L $\triangle AOL$) $= 180^\circ - \alpha \Rightarrow$

в 4-х уг-ке DLOM $\angle D + \angle L(OLD) = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$ – сумма внутр. односторон. при прямых DM и LO и секущ AD,

$\Rightarrow DM \parallel LO$. По признаку пар-ма DLOM – парал-м, (против. стороны $=$ и $\parallel$) ч.т.д.



б) Найти AD, если $\angle BAD = \alpha = 60^\circ$, $BC = 3$.

Т.к. $\alpha = 60^\circ$, то равнобедр. $\triangle AOL$ – равностор. $\Rightarrow AL = AO = r$.

$OM = \frac{AD+BC}{2}$; $AD = AL + LD = r + OM$ ($LD = OM$ – против. стор. пар-ма)

$BC = 3 \Rightarrow OM = \frac{r + OM + 3}{2} \Rightarrow 2 \cdot OM = r + 3 + OM \Rightarrow$

$OM = r + 3$. $\triangle OKM$: $\angle K = 90^\circ$ (радиус $\perp$ касат.), $OK = r$,

$OM = r + 3$, $\angle M = \alpha = 60^\circ \Rightarrow OM = \frac{OK}{\sin\alpha}$; $r + 3 = \frac{r}{\sin 60^\circ}$

$(r+3)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = r$; $r\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2r$; $r(2-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$;

$r = \frac{3\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{4-3} = 6\sqrt{3}+9$. $AD = r + OM = r + \frac{r \cdot 2}{\sqrt{3}}$;

$AD = r\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = (6\sqrt{3}+9)\cdot\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}} = \frac{18+12\sqrt{3}+9\sqrt{3}+18}{\sqrt{3}} = 21 + \frac{36}{\sqrt{3}} = 21 + 12\sqrt{3}$.