№14, вар. 377

14. Решите неравенство: $\sqrt{\log_{0,5}^2 x + 4\log_2 \sqrt{x}} < \sqrt{2}\cdot(4-\log_{16} x^4)$

Решение: Преобразуем входящие в нер-во логарифмы к основанию 2, учитывая, что $x>0$ (ООЗ: $\log x$).

$\log_{0,5} x = \log_{2^{-1}} x = -\log_2 x \Rightarrow \log_{0,5}^2 x = (-\log_2 x)^2 = \log_2^2 x$;

$\log_2 \sqrt{x} = \frac{1}{2}\log_2 x$; $\log_{16} x^4 = \log_{2^4} x^4 = \frac{4}{4}\log_2 x = \log_2 x$.

Данное нер-во теперь имеет вид:

$\sqrt{\log_2^2 x + 2\log_2 x} < \sqrt{2}\cdot(4-\log_2 x)$.

Пусть $\log_2 x = t$, получим $\sqrt{t^2+2t} < \sqrt{2}\cdot(4-t)$.

$$\begin{cases} t^2+2t \ge 0 \\ 4-t>0 \\ t^2+2t < 2(4-t)^2 \end{cases}; \quad \begin{cases} t(t+2)\ge 0 \\ t<4 \\ t^2+2t < 2(16-8t+t^2) \Leftrightarrow t^2-18t+32>0 \end{cases};$$

$t_{1,2} = 9 \pm \sqrt{81-32} = 9\pm 7 = \left[\begin{array}{l} 2 \\ 16 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} t\le -2 \\ t\ge 0 \end{array}\right. \\ t<4 \\ \left[\begin{array}{l} t<2 \\ t>16 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -2 \\ \log_2 x \ge 0 \end{array}\right. \\ \log_2 x < 4 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 2 \\ \log_2 x > 16 \end{array}\right. \end{cases}; \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0<x\le \frac{1}{4} \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ x<16 \\ x<4 \\ x>2^{16} \end{cases}$$

Ответ:

$x \in (0; \frac{1}{4}] \cup [1; 4)$.

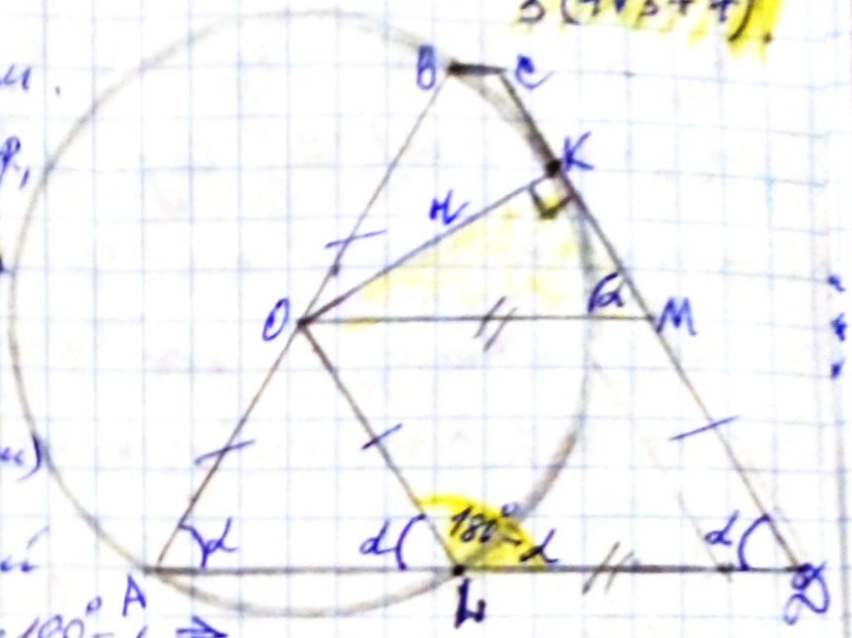
№16, вар. 377.

16. Дана равнобедренная трапеция ABCD с основаниями AD и BC. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне AB как на диаметре, касается боковой стороны CD и второй раз пересекает основание AD в точке L, точка M – середина CD.

а) Докажите, что четырехугольник OLCM – параллелограмм.

б) Найдите AD, если $\angle BAD = 60^\circ$, $BC = 3$.

Ответ: $3(4\sqrt{3}+7)$.



Решение.

а) Так как AB – диаметр окружности, то $\angle ALB = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр), $\angle BLD = 90^\circ$. Аналогично $\angle BKD = 90^\circ$. Точки K и L лежат на окружности с диаметром BD, поэтому $\angle KBL = \angle KDL = \alpha$ (вписанные углы, опирающиеся на дугу KL). Тогда $\angle BAD = \angle BCD = 2\alpha$.

Так как $\angle BAD = \angle ADC = 2\alpha$, то $\angle LDC = \alpha$. Треугольник LDC – равнобедренный, $LD = LC$. Медиана LM равнобедренного треугольника LDC является его высотой, $LM \perp DC$. Так как $OK \perp DC$, то $LM \parallel OK$.

Аналогично $OL \parallel KC$. Следовательно, OLCM – параллелограмм.

б) Пусть $AD = x$. Тогда $AO = OB = \frac{x}{2}$. Из прямоугольного треугольника ALB: $AL = AB\cos 2\alpha = x\cos 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника OKB: $OK = OB\cos\alpha = \frac{x}{2}\cos\alpha$.

Так как OLCM – параллелограмм, $LC = OM = OK = \frac{x}{2}\cos\alpha$. Тогда $DL = LC = \frac{x}{2}\cos\alpha$.

$AD = AL + LD$, $x = x\cos 2\alpha + \frac{x}{2}\cos\alpha$, $1 = \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$, $2\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha - 2 = 0$.

Пусть $\cos\alpha = t$, $4t^2 + t - 4 = 0$, $D = 1 + 64 = 65$, $t = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{8}$. Так как $\alpha < 90^\circ$, $t > 0$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{65}-1}{8}$.

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{65 - 2\sqrt{65} + 1}{64}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{65} - 2}{64}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}}{8}$.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{65}-1}{8} = \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}(\sqrt{65}-1)}{32}$.

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{65 - 2\sqrt{65} + 1}{64} - 1 = \frac{66 - 2\sqrt{65}}{64} - 1 = \frac{33 - \sqrt{65}}{32} - 1 = \frac{1 - \sqrt{65}}{32}$.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}(\sqrt{65}-1)}{1 - \sqrt{65}} = -\sqrt{2\sqrt{65} - 2}$.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = -\sqrt{2\sqrt{65} - 2}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\sqrt{65} - 2}}{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 1} - 1}{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}}$.

$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{2\sqrt{65} - 1 - 2\sqrt{2\sqrt{65} - 1} + 1}{2\sqrt{65} - 2} = \frac{\sqrt{65} - \sqrt{2\sqrt{65} - 1}}{\sqrt{65} - 1}$.

$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sqrt{65} - 1 - \sqrt{65} + \sqrt{2\sqrt{65} - 1}}{\sqrt{65} - 1} = \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 1} - 1}{\sqrt{65} - 1}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{65} - 1} - 1}{\sqrt{2\sqrt{65} - 2}}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\sqrt{2\sqrt{65} - 2}}{\sqrt{65} - 1}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{2\sqrt{65} - 2}}{\sqrt{65} - 1} = \frac{3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 6\sqrt{3} + 9$.

$AD = x = 2\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = (6\sqrt{3} + 9) \cdot \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} = \frac{18 + 12\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 18}{\sqrt{3}} = 21 + \frac{36}{\sqrt{3}} = 21 + 12\sqrt{3}$.