№13. Решите в действительных числах неравенство (здесь $\sqrt{a}$ – арифметический квадратный корень из a):

$$3x\sqrt{x^2+x+2}+(3x+3)\sqrt{x^2+3x+3} \geq (3x+1)\sqrt{2x^2+x+4}+(3x+2)\sqrt{2x^2+7x+7}.$$

Решение:

1. Сделаем часто встречающуюся для подобных неравенств замену $a=\sqrt{x^2+x+2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$, $b=\sqrt{x^2+3x+3} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=\sqrt{2x^2+x+4} \geq \frac{\sqrt{62}}{4}$, $d=\sqrt{2x^2+7x+7} \geq \frac{\sqrt{14}}{4}$. Теперь заметим справедливость вот этого равенства $c^2-d^2=3(b^2-a^2)=3(2x+1)$ и этого неравенства $(a+b)(c+d)-1>0$. Также легко проверить неравенства $c-a>0$ и $d-b \geq 0$ из которых следует, что $(a+b)-(c+d)<0$.

2. После замены неравенство можно записать в виде:

$3(b^2-a^2-1)a+3(b^2-a^2+1)b \geq (d^2-c^2-1)c+(d^2-c^2+1)d;$

$3(b-a)((a+b)^2+1) \geq (d-c)((d+c)^2+1);$

$3(b^2-a^2)((a+b)^2+1)(d+c) \geq (d^2-c^2)((d+c)^2+1)(b+a);$

$(b^2-a^2)\big((a+b)-(c+d)\big)\big((a+b)(c+d)-1\big) \geq 0;\ b^2-a^2 \leq 0.$

3. После обратной замены получаем неравенство: $2x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\frac{1}{2}\right]$.